

MATEMATIKAVERSENY

Munkaidő: 4 óra

1. Tekintsünk egy ABC háromszöget, melyben a BAC szög mértéke $\frac{2\pi}{3}$. Továbbá legyen P a háromszög egy belső pontja. Igazoljuk, hogy

- $PB + PC < AB + AC$;
- $PB + PC + PA > AB + AC$.

2. Öt egyforma, üres, 2 litres vödör áll egy szabályos ötszög csúcsaiban. Hamupipőke és gonosz mostohája a következőt játsza: Minden kör elején a mostoha egy liter vizet merít a közeli folyóból, és tetszőlegesen kitölti az öt vödörbe. Ezután Hamupipőke kiválaszt két szomszédos vödröt, kiüríti, és visszateszi őket a helyükre. Ezután elkezdődik a következő kör. A mostoha célja, hogy az egyik vödör túlsorduljon. Hamupipőke célja, hogy ezt megakadályozza. Vajon sikerülhet-e a gonosz mostoha terve?

3. Szabályos testnek nevezzük azt a testet, melynek felülete egybevágó szabályos sokszöglapokból áll, és minden csúcsában ugyanannyi lap találkozik. Hány szabályos test létezik?

4. a. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $k > 0$ esetén

$$x^2 - 2(k+1)x + (k^2 + 3k + 1) \geq \frac{k(k+1)^2}{x^2 + k}.$$

- b. Adottak az a, b, c, d pozitív valós számok, amelyekre $a + b + c + d = 3874$. Határozzuk meg az

$$S = \sqrt[3]{\frac{a}{b+44}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+44}} + \sqrt[3]{\frac{c}{d+44}} + \sqrt[3]{\frac{d}{a+44}}$$

kifejezés maximális értékét.

5. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \left(y + z + \frac{1}{2y^2z^2} \right) \\ y = \frac{2}{5} \left(x + z + \frac{1}{2x^2z^2} \right) \\ z = \frac{2}{5} \left(y + x + \frac{1}{2y^2x^2} \right). \end{cases}$$