# Matematikaverseny

**Munkaidő: 4óra**

1. Oldjuk meg az $x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ egyenletet a természetes számok halmazán.

2. Az $ABCD$ egységoldalú négyzet $AB$ oldalán felvesszünk egy tetszőleges $P$ pontot, a $BC$ oldalán egy tetszőleges $Q$ pontot, a $CD$ oldalán egy tetszőleges $R$ pontot és a $DA$ oldalán egy tetszőleges $S$ pontot. Igazoljuk, hogy $|PQ| + |QR| + |RS| + |SP| \geq 2\sqrt{2}$.

3. Egy matematika versenyen 2023 diák versenyzik. Tételezzük fel, hogy mindegyikük magassága egy egyedi valós szám. A versenyen egy első, egy második, egy harmadik és egy negyedik díjat osztanak ki. Azt mondjuk, hogy a díjazottak "szamárlétrát" alkotnak, ha az első helyezett alacsonyabb a második helyezettnél, aki alacsonyabb a harmadik helyezettnél, aki alcsonyabb a negyedik helyezettnél. Hányféleképpen lehet kiosztani a díjakat, úgy, hogy a díjazottak egy "szamárlétrát" alkossanak?

4. Határozzuk meg, azon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy $f(x + 2023) \leq f(x) + 2023$ és $f(x + 2007) \geq f(x) + 2007, \forall\, x \in \mathbb{Z}$ esetén.

5. A $p_1, p_2, \ldots, p_n$ olyan pozitív egész számok, melyek összege pontosan 2023. Mennyi a $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ szorzat maximális értéke?