

MATEMATIKAVÉRSÉNY
2018. MÁJUS 12.

Munkaidő: 4óra

1. Egy körön felvesszünk 432 pontot egyenlő távolságra egymástól. A pontokat négy színnel színezzük ki, véletlenszerűen, de úgy, hogy mindenik színből ugyanannyi szerepeljen. Igazoljuk, hogy mindenik színnek megfelelően kiválasztható egy-egy háromszög, úgy, hogy a kapott négy darab háromszög kongruens legyen.

2. a) El lehet-e helyezni 21 kört a síkban úgy, hogy minden kör pontosan másikat érintsen?
b) Adott 2017 háromszöglap és 2018 négyszöglap. Össze lehet-e rakni ezekből a lapokból egy poliédert?

3. Adottak a, b, c pozitív valós számok, úgy, hogy $a + b + c = 1$. Igazoljuk, hogy
 - a)
$$4(ab + ac + bc) \leq 9abc + 1.$$
 - b)
$$(ab)^{\frac{5}{4}} + (ac)^{\frac{5}{4}} + (bc)^{\frac{5}{4}} < \sqrt{\frac{7}{216}}.$$

4. a) Adott az $[ABCD]$ tetraéder. Ha a \widehat{CAD} és \widehat{CBD} két tompaszög, igazoljuk, hogy $|CD| > |AB|$.
b) Az $[ABCD]$ tetraéder minden lapjának ugyanakkora a területe. Legyen P az $[ABCD]$ tetraéder egy belső pontja. Jelölje d_A a P pont távolságát az A csúccsal szemközti laptól, a d_B, d_C, d_D távolságokat analóg módon értelmezzük.
Igazoljuk, hogy
$$|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq 3(d_A + d_B + d_C + d_D).$$