

MATEMATIKAVERSENY

Munkaidő: 4 óra

- Legyen ABC egy háromszög. Legyen M az $[AB]$ szakasz azon pontja, melyre $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2017}$, legyen N a $[BC]$ szakasz azon pontja, melyre $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{2018}$ és legyen P a $[CA]$ szakasz azon pontja, melyre $\frac{CP}{PA} = \frac{1}{2019}$. Továbbá legyen Q az AN és CM metszéspontja, R az AN és BC metszéspontja, illetve S a BP és CM metszéspontja. Határozd meg az ABC és QRS háromszögek területeinek az arányát!
- Igazold, hogy bármely $x, y > 0$ valós számok esetén
 - $x^p + y^p \leq (x + y)^p$, ha $p \geq 1$;
 - $x^p + y^p \geq (x + y)^p$, ha $p \in [0, 1]$.
- Legyen $k \geq 2$ egy rögzített természetes szám. Egy adott $n \in \mathbb{N}$ kilogramm súlyú tárgyat helyezünk egy kétkarú mérleg egyik tálcájába. Feladatunk, hogy súlyokat helyezzünk el a mérleg tálcaiba, úgy, hogy kiegyenlítsük azt. Ha csupán $1, k, k^2, k^3, \dots$ kilogrammnak megfelelő súlyok állnak a rendelkezésünkre, akkor legkevesebb hány súlyra van szükségünk a kiegyenlítéshez?
- Igazold, hogy bármely n természetes számra létezik n darab egymás utáni természetes szám, amelyek közül egyik sem prímszám vagy prímszám hatvány.