

MATEMATIKAVÉRSÉNY  
2017. MÁJUS 13.

1. Maximum hány részre osztható egy sík

- (a)  $n$  egyenes segítségével?
- (b)  $n$  kör segítségével?

2. Legyen  $M = \{1, 2, \dots, 2017\}$ . Minden  $k \in \{1, 2, \dots, 2016\}$  esetén legyen

$$\alpha_k = \frac{1}{2018} \sum_{\substack{A \subset M \\ |A|=k}} (\min A + \max A),$$

ahol  $|A|$  a halmaz számosságát jelöli. Határozzuk meg

$$\sum_{k=1}^{2016} \alpha_k$$

összeget.

3. Legyenek  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2017}$  természetes számok. Minden  $k \in \{1, 2, \dots, 2017\}$  legyen

$$s_k = \sum_{\substack{A \subset \{x_1, \dots, x_k\} \\ A \neq \emptyset}} \frac{1}{\prod_{a \in A} a}.$$

Például

$$s_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$
$$s_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3}.$$

Tudva, hogy  $s_{2017}$  és  $s_{2016}$  természetes számok, határozzuk meg az  $x_j$  számokat minden  $j = \overline{1, 2017}$  esetén.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 2\sqrt{3} \\ \sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 2. \end{cases}$$

5. Hány olyan részhalmaza van az  $\{1, 2, \dots, 50\}$  halmaznak, melyben az elemek összege kisebb vagy egyenlő mint 637?