Matematikaverseny

A feladat

1. Az N pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata 7^{595}. Határozzuk meg az N szám utolsó számjegyét!

2. Egy 2016 fős parlamentben mindenki pontosan négy képviselőtársát pofozta fel. Bizonyítsuk be, hogy felállítható olyan 224 fős bizottság, melynek semelyik két tagja sincs ellenséges viszonyban!

B feladat

1. Mely 3-nál nagyobb p prímszám és n pozitív egész szám esetén teljesül, hogy $p^n - 4$ negyedik hatvány?

C feladat

1. Adott egy kör az AB átmérőjével. Legyen C a körvonal A-tól és B-től különböző pontja! Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a D és E pontot úgy, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$ teljesüljön. Legyen k_1 a BC oldalt F pontban érintő D középpontú, míg k_2 az AC oldalt G pontban érintő E középpontú kör! Legyen t a CFG, míg T az ABC háromszög területe. Milyen határok között mozog a $\dfrac{t}{T}$ tört értéke?

D feladat

1. Legyen n egy természetes szám, valamint az $a_1, a_2, ..., a_n$ és b_1, b_2,... b_n valós számok. Ekkor igazoljuk, hogy
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}),$$
ahol $S_k = a_1 + ... + a_k$, minden $k = 1, 2, ..., n$ esetén.

2. Felhasználva az előző feladatot, igazoljuk, hogy ha $b_1, ...b_n$ olyan valós számok amelyekre $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, akkor
$$m b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1,$$
ahol m és M az $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ halmaz a minimuma és maximuma.

3. Legyen most $a_k = \sin((k+m)x) \sin \frac{x}{2}$ és $b_k = \frac{1}{k+m}$, ahol $m < n$ természetes szám, x pedig egy olyan valós szám ami nem páros többszöröse π-nek. Bizonyítsuk be, hogy
$$\left| \sum_{k=1+m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq \frac{1}{(m+1) \left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy minden x valós és n természetes szám esetén fennáll a következő egyenlőtlenség
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2\sqrt{\pi}$$