# Sapientia ECN Programozói és Matematika verseny

**Sapientia EMTE, Marosvásárhely**
2015. május 9.

---

1. (a) Legyenek $a, b \in \mathbb{Z}$ számok. Igazoljuk, ha
$$2015 | a^3 + b^3,$$
$$2015 | a^4 + b^4,$$
akkor $2015 | a^5 + b^5$.

   (b) Igaz-e, hogy
$$(\underbrace{66...6}_{2015})^2 + \underbrace{88...8}_{2015} = \underbrace{44...4}_{2 \cdot 2015}$$

2. Adott az $[ABCDA'B'C'D']$ kocka ($[ABCD]$ az alaplap). Jelölje F az $[AA']$ él $A'$ ponthoz közelebbi harmadoló pontját. Legyen G az $[A'B'C'D']$ fedőlap középpontja.

   (a) Határozzuk meg a $(BFG)$ sík és a kocka metszésekor keletkezett sokszög területét.

   (b) Számítsuk ki a $B'$ csúcsnak a $(BFG)$ síktól mért távolságát.

3. (a) Legyen $d \in \mathbb{N}^*$ egy olyan természetes szám, amely relatív prím 30-al. Igazoljuk, hogy $d$-nek van egy olyan többszöröse, amelyet csak az 1-es számjeggyel írunk fel a tízes számrenszerben.

   (b) Igazoljuk, hogy $2^{2015}$-nek van egy olyan többszöröse a tízes számrenszerben, amely csak a 6-os és 7-es számjegyeket tartalmazza.

4. Igazoljuk, hogy minden $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ esetén
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$